Clase 07-01 Elizabeth Villota Cerna
Semestre 2009 I - UNI 03/06/2009

Siguiendo con la respuesta a la pregunta de como construir un observador para un sistema, al igual que en el caso del observador de orden completo, consideraremos observadores que sean representados como sistemas lineales y tomen las entradas y salidas del sistema para producir un estimado de los estados del sistema. La diferencia con respecto al observador anterior radica en que se aprovechará el hecho de que ciertos estados se pueden definir directamente usando la salida del sistema, y asi, el observador sólo debe concentrarse en estimar los estados no conocidos.

2.2. Observador de Orden Reducido

Considerando el sistema lineal $n-$ dimensional con $D = 0$ para simplificar la exposición:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_o \\ y(t) & = Cx(t) \end{array}, \tag{1}$$

donde A, B, C son, respectivamente, matrices reales constantes $n \times n$, $n \times p$ y $q \times n$ $(p \leq n)$. Asumiendo que el sistema es observable. Nuestro objetivo es determinar un sistema dinámico que estime el vector de estados x basado en las entradas u y salidas y.

Asumiendo que C tiene rango de columna completa, esto es rango$C = q$. Definir

$$P = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}, \tag{2}$$

donde R es una matriz real constante $(n-q) \times n$ y es enteramente arbitraria siempre y cuando P sea no singular. Calculando la inversa de P como

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & \vdots & Q_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

donde Q_1 y Q_2 son matrices $n \times q$ y $n \times (n-q)$. Claramente se tiene que

$$I_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Ahora transformaremos (1) usando $\bar{x} = Px$,

$$\begin{array}{ll} \dot{\bar{x}} & = PAP^{-1}\bar{x} + PBu \\ y & = CP^{-1}\bar{x} = CQ = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x}, \end{array}$$

que puede ser particionado como,

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u, \\ y & = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{x}_1 \end{array}, \tag{5}$$

donde $\bar{x}_1$ consiste en los primeros q elementos de $\bar{x}$ y $\bar{x}_2$ es lo que queda de $\bar{x}$; $\bar{A}_{11}$, $\bar{A}_{12}$, $\bar{A}_{21}$ y $\bar{A}_{22}$ son, respectivamente, matrices $q \times q$, $q \times (n-q)$, $(n-q) \times q$ y $(n-q) \times (n-q)$; $\bar{B}_1$ y $\bar{B}_2$ son particionadas apropiadamente. De (5) vemos que $y = \bar{x}_1$. Entonces solo necesitaremos estimar los $n-q$ elementos de $\bar{x}$. Consecuentemente solo necesitamos un estimador de estados de dimensión $n-q$ en lugar de un estimador de estados de dimensión n que presentamos en la clase anterior.

Usando $\bar{x}_1 = y$, reescribimos (5) como

$$\begin{array}{ll} \dot{y} & = \bar{A}_{11}y + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1 u, \\ \dot{\bar{x}}_2 & = \bar{A}_{21}y + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2 u, \end{array} \tag{6}$$

y de forma más sucinta aún usando

$$\bar{u} = \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 u,$$
$$w = \dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 u,$$

que son funciones de señales conocidas y y u, luego (6) se pueden reescribir como,

SINTESIS:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{\bar{x}}_2 & = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u}, \\ w & = \bar{A}_{12}\bar{x}_2. \end{array}} \tag{7}$$

Nótese que si la ecuación dinámica en (7) es observable, se puede construir un estimador de $\bar{x}_2$.

Teorema El sistema $\dot{x} = Ax + Bu,\ \ y = Cx$ en (1) es observable o, equivalentemente, el sistema $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u,\ \ y = \bar{C}\bar{x}$ en (5) es observable si y solo si el sistema $\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u},\ \ w = \bar{A}_{12}\bar{x}_2$ en (7) es observable.

Asimismo, se puede probar la controlabilidad de los sistemas involucrados arriba.

Luego, $\dot{x} = Ax + Bu,\ \ y = Cx$ es observable, entonces $\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u},\ \ w = \bar{A}_{12}\bar{x}_2$ es observable. Consecuentemente, existe un estimador de estados de $\bar{x}_2$ de dimensión $n-q$ de la forma

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}w + \bar{u}, \tag{8}$$

tal que los autovalores de $(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})$ pueden ser arbitrariamente asignados mediante una elección apropiada de $\bar{L}$. La sustitución de $\bar{u}$ y w en (8) resulta en

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}(\dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 u) + \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 u. \tag{9}$$

Esta ecuación contiene la derivada de y. Esta derivada se puede eliminar definiendo

$$z = \hat{\bar{x}}_2 - \bar{L}y. \tag{10}$$

Luego (9) resulta

IMPLEMENTACIÓN:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}y) + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u \\ &= \boxed{(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})]y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u} \end{aligned} \tag{11}$$

Esta es una ecuación dinámica de dimensión $n-q$ con y y u como entradas que se puede construir fácilmente usando, por ejemplo, con circuitos de ampificadores operacionales. De (10) vemos que $z + \bar{L}y$ es un estimado de $\bar{x}_2$. De hecho, si definimos $e = \bar{x}_2 - (z + \bar{L}y)$, luego tenemos

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\bar{x}}_2 - (\dot{z} + \bar{L}\dot{\bar{x}}_1) = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2 u - (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}\bar{x}_1) \\ &\quad -(\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})\bar{x}_1 - (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u - \bar{L}\bar{A}_{11}\bar{x}_1 - \bar{L}\bar{A}_{12}\bar{x}_2 - \bar{L}\bar{B}_1 u \\ &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(\bar{x}_2 - z - \bar{L}\bar{x}_1) \\ \dot{e} &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})e. \end{aligned} \tag{12}$$

Dado que los autovalores de $(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})$ pueden ser arbitrariamente asignados, la razón con la que $e(t)$ se aproxima a cero o, equivalentemente, la razón con la que $(z + \bar{L}y)$ se aproxima a $\bar{x}_2$ se puede determinar por el diseñador. Luego $z + \bar{L}y$ provee un estimado de $\bar{x}_2$.

Combinando $\bar{x}_1 = y = \hat{\bar{x}}_1$ con $\hat{\bar{x}}_2 = z + \bar{L}y$ para formar

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix}$$

Dado que $\bar{x} = Px$, tenemos $x = P^{-1}\bar{x} = Q\bar{x}$, o

$$\hat{x} = Q\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ \bar{L} & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \tag{13}$$

Esta expresión provee un estimado del vector de estados $n-$dimensional original x.

Una comparación entre los estimadores de estado de orden $n-q$ y n está dada en función del orden. El observador de orden reducido requiere de la transformación presentada en (2). Excluyendo este paso, la computación requerida en el caso del observador de orden reducido es claramente menor en comparación al observador de orden completo. En la implementación, el observador de orden reducido también requiere de un menor número de integradores. En el caso del observador de orden reducido, la señal y es realimentada através de la matriz constante Q_1 hacia la salida del estimador. Entonces, si y es contaminada con ruido, estos ruidos parareceran a la salida del estimador. En el caso del observador de orden completo, la señal y es integrada o filtrada; de ahi que ruidos de alta frecuencia en y serán suprimidos con un observador de orden completo.

3.2. Compensador controlador-estimador combinado

Se puede probar que el principio de Separación también se cumple en el caso del estimador de orden reducido. COMPLETAR...

4. Ejemplo: Motor DC (continuación Clase 06-01)

Usando el modelo del motor DC definido en Clase 06-01, como descrito a continuación

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-25 & 0 & -0{,}5\\ 0 & 0 & 1\\ 46{,}296 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\ 0\\ 0\end{bmatrix} u = Ax + bu\\ y &= \begin{bmatrix}0 & 0{,}02 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = cx,\end{aligned}$$

en esta parte nos centraremos en el diseño de un estimador de orden reducido. Escogiendo los polos del estimador de orden reducido en $\{-5+2i, -5-2i\}$.

Definiendo la matriz de transformación P a continuación:

$$P = \begin{bmatrix}0 & 0{,}02 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

luego $Q = P^{-1}$ queda definida como

$$P = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 50 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

y el sistema transformado resulta,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|cc}0 & 0 & 0{,}02\\ \hline 0 & -25 & -0{,}5\\ 0 & 46{,}296 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c}0\\ \hline 5\\ 0\end{array}\right] u,\\ y &= \left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\end{array}\right]\bar{x} = \bar{x}_1\end{aligned}.$$

La síntesis del estimador se hace en base al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2 &= \begin{bmatrix}-25 & -0{,}5\\ 46{,}296 & 0\end{bmatrix}\bar{x}_2 + \bar{u},\\ w &= \begin{bmatrix}0 & 0{,}02\end{bmatrix}\bar{x}_2\end{aligned}.$$

El polinomio característico del estimador de orden reducido es:

$$\det(sI_2 - \bar{A}_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12}) = (s+5-2i)(s+5+2i) = s^2 + 10s + 29.$$

Sea $\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \end{bmatrix}$, entonces la siguiente ecuación debe ser satisfecha:

$$\left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -25 & -0{,}5 \\ 46{,}296 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0{,}02 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s+25 & 0{,}02\bar{l}_1 + 0{,}5 \\ -46{,}296 & s + 0{,}02\bar{l}_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 10s + 29.$$

$$s^2 + (25 + 0{,}02\bar{l}_2)s + 46{,}296(0{,}02\bar{l}_1 + 0{,}5) + 25(0{,}02\bar{l}_2) = s^2 + 10s + 29.$$

Finalmente, se obtiene que: $\bar{L} = \begin{bmatrix} 411{,}3228 \\ -750 \end{bmatrix}$

La dinámica del estimador de estados de orden reducido es descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})]y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ \bar{L} & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

esto es:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -25 & -8{,}7265 \\ 46{,}296 & 15 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -3738{,}2 \\ 7792{,}6 \end{bmatrix} y, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 411{,}3228 \\ 50 \\ -750 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

Si conectamos el estimador de orden reducido del motor DC, junto con la realimentación de estados (calculada en Clase 06-02), entonces obtenemos el sistema en lazo cerrado con el compensador controlador-estimador-orden-reducido combinado. La Fig. 1 muestra la gráfica de x_1 y su estimado para el sistema en lazo cerrado con estimador en el lazo, donde $r = 0$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & -0{,}1 \end{bmatrix}^T$, y $z(0) = 0$.

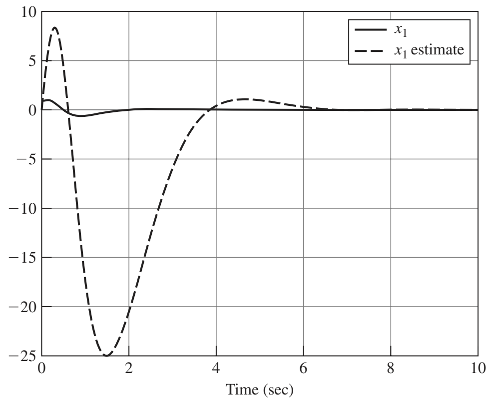

Figura 1: Gráficas de x_1 y su estimado versus tiempo para el sistema no lineal en lazo cerrado con estimador de orden reducido en el lazo.

Fuente: Capítulo 3 del libro *Systems and Control* de Stanislaw H. Zak (2002).

Fuente: Capítulo 7 del libro *Linear System Theory and Design* de C.T. Chen (1984).